ГАПОУ АО «Архангельский медицинский колледж»

Справочник основных формул

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

Александров А.Д.

Бабаджанян АГ, Дресвянина НВ

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$
Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$

Действия с дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$c : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$$

Пропорции

Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следуют равенства:

$$a\cdot d=b\cdot c$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$$

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$

$$\frac{b}{d}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{x}{b}=\frac{c}{d}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{bc}{d}$$

$$\frac{a}{x}=\frac{c}{d}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{ad}{c}$$

Логарифмы

$$a^c = b,\ \log_a b = c, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

Основное логарифмическое тождество:

$$b = a^{\log_a b}$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\frac{1}{c} \cdot \log_a b = \log_{a^c} b$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x = \log_{a^n} x^n$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Квадратное уравнение общего вида:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Разложение на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0,$$

Теорема Виета для приведённого уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q, x_1 + x_2 = -p$$

Степени

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m-раз} = a^m$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Корни

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right) = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$$

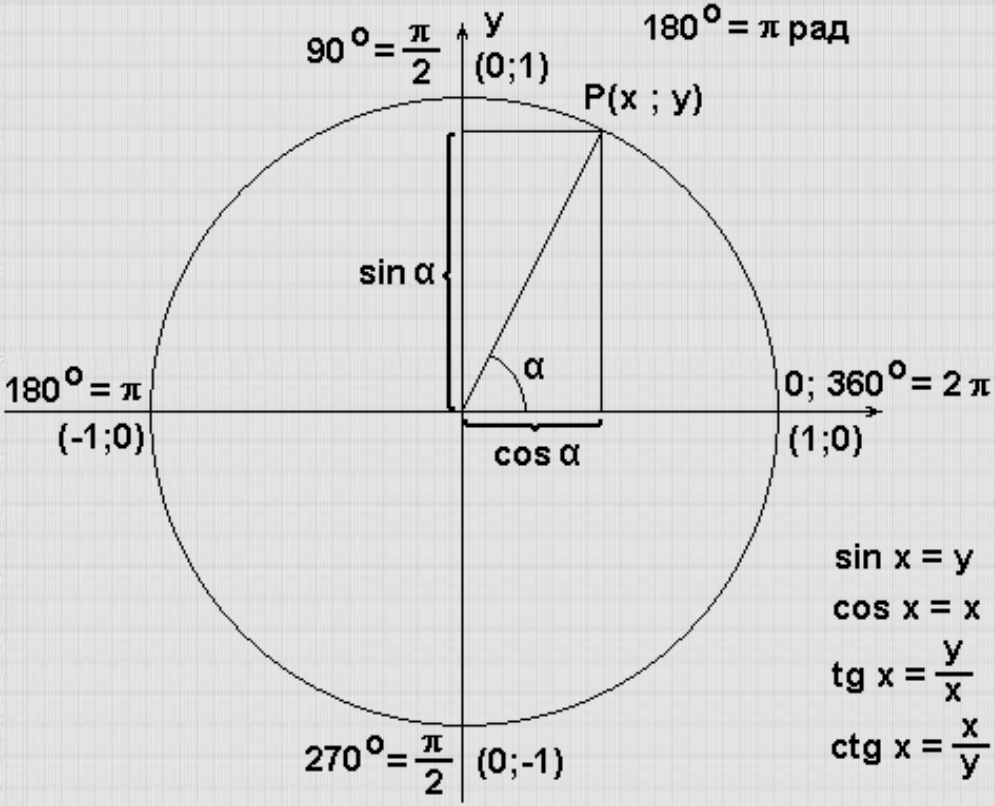
$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^x = \sqrt[n]{a^{m \cdot x}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Основные тригонометрические функции



$\sin x = y$

$\cos x = x$

$\operatorname{tg} x = \frac{y}{x}$

$\operatorname{ctg} x = \frac{x}{y}$

Основные тригонометрические функции

Знаки тригонометрических функций и значения функций характерных углов

	sin α	cos α	tg α	ctg α
$0< \alpha <\pi/2$	+	+	+	+
$\pi/2< \alpha < \pi$	+	–	–	–
$\pi< \alpha <3\pi/2$	–	–	+	+
$3\pi/2< \alpha <2\pi$	–	+	–	–

Значения функций характерных углов

радианы	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	½	√2/2	√3/2	1	0	–1	0
cos α	1	√3/2	√2/2	½	0	–1	0	1
tg α	0	√3/3	1	√3	∞	0	∞	0
ctg α	∞	√3	1	√3/3	0	∞	0	∞

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$cec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos ec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Формулы приведения. Чётность.

функция / аргумент	**sin**	**cos**	**tg**	**ctg**
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2 \pm \alpha$	$\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$
$\pi \pm \alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$
$3\pi/2 \pm \alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Периодичность тригонометрических функций

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha \qquad n \in Z$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha \qquad n \in Z$$

$$tg(\alpha + \pi\pi n = tg\,\alpha \qquad n \in Z$$

$$ctg(\alpha + \pi\pi n = ctg\,\alpha \qquad n \in Z$$

Функции двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg\,2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

Формулы суммы аргументов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$$

Функции половинного угла

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

Сумма и разность, тригонометрических функций

$$\sin a + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}; \quad \alpha,\beta \neq \pi n$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}; \quad \alpha,\beta \neq \pi n$$

Пределы функций

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$$

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$$

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

$\lim C = C$ C =const

$\lim Cx = C \lim x$ C =const

$\lim \frac{C}{0} = \infty$ C =const

$\lim \frac{C}{\infty} = 0$ C =const

I замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

II замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Таблица производных

$$(C)' = 0$$

$$(x^n)' = \alpha\, x^{n-1}$$

$$(x)' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = \alpha^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Приближенные вычисления

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x$$

$$(x_0+\Delta x)^k\approx x_0{}^k+kx_0{}^{k-1}\Delta x$$

$$\sin(x_0+\Delta x)\approx\sin x_0+\cos x_0\Delta x$$

$$\cos(x_0+\Delta x)\approx\cos x_0-\sin x_0\Delta x$$

$$tg(x_0+\Delta x)\approx tgx_0+\frac{1}{\cos^2 x_0}\Delta x$$

$$ctg(x_0+\Delta x)\approx ctgx_0-\frac{1}{\sin^2 x_0}\Delta x$$

$$arctg(x_0+\Delta x)\approx arctgx_0+\frac{1}{1+x_0{}^2}\cdot\Delta x$$

$$\log_a(x_0+\Delta x)\approx\log_a x_0+\frac{1}{x_0\ln a}\Delta x$$

Таблица интегралов

$$\int 0 \cdot dx = c;$$

$$\int 1 \cdot dx = x + c;$$

$$\int x^{\alpha} \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + c;$$

$$\int a^{x} \cdot dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c;$$

$$\int e^{x} \cdot dx = e^{x} + c;$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c;$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c;$$

Таблица интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x + c;$$

$$\int tgx \cdot dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$\int ctgx \cdot dx = \ln|\sin x| + c;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\,\frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c;$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Среднее значение функции f(x) на [a;b]:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Элементы комбинаторики

Перестановки

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

1!=1, 0!=1

Размещения

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^0 = 1, \qquad A_0^0 = 1$$

$$A_n^n = P_n = n!$$

Сочетания

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \qquad C_n^0 = 1$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \qquad C_n^k = C_n^{n-k}$$

Вероятность события А

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m – число случаев, благоприятствующих событию **А**.
n – общее число случаев.